где $\mathscr{E}$ — полная энергия квантовой системы, а $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному Ш. у.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x, y, z)\psi = \mathscr{E}\psi. \qquad (3)$$

Для квантовых систем, движение к-рых происходит в огранич. области пространства, решения Ш. у. существуют только для нек-рых дискретных значений энергии: $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., $\mathscr{E}_n$; члены этого ряда (в общем случае бесконечного) нумеруются набором целых квантовых чисел n. Каждому значению $\mathscr{E}_n$ соответствует волновая ф-ция $\psi_n(x, y, z)$ и знание полного набора этих ф-ций позволяет вычислить все измеримые характеристики квантовой системы.

Ш. у. является матем. выражением фундам. свойства микрочастиц — корпускулярно-волнового дуализма, согласно к-рому все существующие в природе частицы материи наделены также волновыми свойствами. Ш. у. удовлетворяет *соответствия принципу* и в предельном случае, когда длины волн де Бройля значительно меньше размеров, характерных для рассматриваемого движения, позволяет описать движение частиц по законам классич. механики. Переход от Ш. у. к ур-ниям классич. механики, описывающей движения частиц по траекториям, подобен переходу от волновой оптики к геометрической. Аналогия между классич. механикой и геом. оптикой, к-рая является предельным случаем волновой, сыграла важную роль в установлении Ш. у.

С матем. точки зрения Ш. у. есть волновое ур-ние и по своей структуре подобно ур-нию, описывающему колебания нагруженной струны. Однако, в отличие от решений ур-ния колебаний струны, к-рые дают геом. форму струны в данный момент времени, решения $\psi(x, y, z; t)$ Ш. у. прямого физ. смысла не имеют. Смысл имеет квадрат модуля волновой ф-ции, а именно величина

$$|\psi_n(x, y, z; t)|^2 = \rho(x, y, z; t),$$

равная вероятности нахождения частицы (системы) в момент t в квантовом состоянии n в точке пространства с координатами x, y, z. Эта вероятностная интерпретация волновой ф-ции — один из осн. постулатов *квантовой механики*.

Лит.: Шредингер Э., Новые пути в физике. Статьи и речи, пер. с нем., М., 1971; см. также лит. при ст. *Квантовая механика*.

Л. И. Пономарёв.

ШРЁДИНГЕРА УРАВНЕ́НИЕ НЕЛИНЕ́ЙНОЕ — нелинейное дифференциальное ур-ние в частных производных

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\varkappa|\psi|^2\psi, \qquad (1)$$
$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x),$$

где $\psi(x, t)$ — комплекснозначная ф-ция (заряж. скалярное поле). Вещественный параметр $\varkappa$, входящий в ур-ние, играет роль константы связи. Своё название Ш. у. н. получило из-за формального сходства с *Шрёдингера уравнением* для свободной одномерной частицы, в к-рое ур-ние (1) переходит в линейном пределе $\varkappa = 0$. В физ. приложениях ур-ние (1) возникает при исследовании широкого класса нелинейных явлений, в частности в физике *плазмы*, в *нелинейной оптике* и др.

Ш. у. н. может быть проинтегрировано с помощью *обратной задачи рассеяния метода*. В основе данного метода лежит представление ур-ния (1) в виде условия совместности переопределённой системы ур-ний (вспомогат. линейной задачи):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x, t, \lambda)F,$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x, t, \lambda)F.$$

Здесь F — двухкомпонентный вектор-столбец, зависящий от x, t и нек-рого произвольного комплексного числа λ, получившего назв. «спектральный параметр», U и V — матрицы 2×2:

$$U = -\frac{i\lambda}{2}\sigma_3 + \varepsilon\sqrt{|\varkappa|}(\bar{\psi}\sigma_+ + \psi\sigma_-),$$
$$V = -\lambda U + i\varkappa|\psi|^2\sigma_3 - i\varepsilon\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\sigma_+ - \frac{\partial\psi}{\partial x}\sigma_-\right).$$

Здесь и в дальнейшем σ_a — *Паули матрицы* ($a = 0, 1, 2, 3$), $\sigma_0 = I$, $\sigma_\pm = (1/2)(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, $\bar{\psi}$ — ф-ция, комплексно-сопряжённая ф-ции ψ, $\varepsilon = 1$ при $\varkappa > 0$, $\varepsilon = i$ при $\varkappa < 0$. Выполнение условия совместности для вспомогательной линейной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \qquad (1')$$

эквивалентно выполнению ур-ния (1). Запись ур-ния (1) в виде (1′) принято называть представлением нулевой кривизны.

Альтернативно метод обратной задачи рассеяния может быть сформулирован на основе представления Лакса.

Центр. объектом в методе обратной задачи рассеяния является матрица монодромии $T(\lambda)$. Для определения последней необходимо ввести матрицу перехода $T(x, y, \lambda)$, удовлетворяющую ур-нию

$$\frac{\partial}{\partial x}T(x, y, \lambda) = U(x, \lambda)T(x, y, \lambda)$$

и условию

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I.$$

Конкретное выражение матрицы монодромии через матрицу перехода зависит от вида граничных условий, накладываемых на ф-цию $\psi(x, t)$. Предположим, что решение Ш. у. н. ищется в классе быстроубывающих ф-ций с нач. условием $\psi(x) \in S(R^1)$ [$S(R^1)$ — пространство Шварца]. Тогда

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon^2\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to-\infty}} e^{i\lambda x\sigma_3/2}\, T(x, y, \lambda)\, e^{-i\lambda y\sigma_3/2}.$$

Замечательным свойством матрицы монодромии является особенно простая зависимость её матричных элементов от времени:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0),$$
$$b(\lambda, t) = e^{-i\lambda^2 t}b(\lambda, 0).$$

Ф-ции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ принято называть коэф. перехода. В теории рассеяния величины $a^{-1}(\lambda)$ и $b(\lambda)/a(\lambda)$ играют роль коэф. прохождения и отражения. Решение $\psi(x, t)$ ур-ния (1) однозначно восстанавливается по данным рассеяния и сводится к исследованию аналитич. свойств коэф. перехода. Конкретно это может быть сделано с помощью методов задачи Римана о факторизации матрицы или с помощью интегральных ур-ний Гельфанда — Левитана — Марченко. В частном случае безотражательного потенциала [$\varkappa < 0$, $b(\lambda) = 0$] решение находится явно и называется N-солитонным [где N — число нулей коэф. $a(\lambda)$].

С помощью метода обратной задачи рассеяния также находится решение задачи Коши для граничных условий вида $\psi(x, t) \to \rho e^{i\varphi_\pm(t)}$, $x \to \pm\infty$ (условия конечной плотности). В этом случае обычно в правую часть ур-ния (1) добавляют линейное по ψ слагаемое $-2\varkappa\rho^2\psi$ (соответственно в представлении нулевой кривизны матрица V заменяется на $V = -i\varkappa\rho^2\sigma_3$).

В случае периодич. граничных условий $\psi(x+L, t) = \psi(x-L, t)$, $-L \leqslant x \leqslant L$ решение Ш. у. н. сводится к исследованию вспомогат. линейной задачи на *римановой поверхности* ф-ции

$$y^2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{E_n}\right).$$

Здесь E_n — границы разрешённых и запрещённых зон в спектре оператора $\mathscr{L} = i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{|\varkappa|}(\psi\sigma_- - \bar{\psi}\sigma_+)$. В случае, когда число зон конечно, решение $\psi(x, t)$ ур-ния (1) допус-